

# Harry Potter trifft Alice im Wunderland der Mathematik

Annalina Vorbau

Ulrich Eckhardt

## Inhaltsverzeichnis

|           |                                                     |           |
|-----------|-----------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Vorbemerkung</b>                                 | <b>1</b>  |
| <b>2</b>  | <b>Was machen Mathematiker den ganzen Tag über?</b> | <b>1</b>  |
| <b>3</b>  | <b>Ein Streit zwischen Hermine und Ron</b>          | <b>2</b>  |
| <b>4</b>  | <b>Wie Mathematik drei Kamelen das Leben rettet</b> | <b>3</b>  |
| <b>5</b>  | <b>Ein Zwerg verschwindet</b>                       | <b>4</b>  |
| <b>6</b>  | <b>Möbiusband</b>                                   | <b>7</b>  |
| <b>7</b>  | <b>In einem Irrgarten</b>                           | <b>10</b> |
| <b>8</b>  | <b>Drei Kinder im Kino</b>                          | <b>12</b> |
| <b>9</b>  | <b>In einem Zug</b>                                 | <b>14</b> |
| <b>10</b> | <b>Blöcke stapeln</b>                               | <b>15</b> |
| <b>11</b> | <b>Das Problem der Königsberger Brücken</b>         | <b>18</b> |
|           | <b>Literatur</b>                                    | <b>19</b> |

# 1 Vorbemerkung

Dies ist das Manuskript einer Veranstaltung. Es handelt sich um ein Gespräch über Mathematik zwischen Annalina Vorbau (im Text mit **A** abgekürzt und blau markiert), die 12 Jahre alt ist und ihrem Großvater (im Text mit **G** abgekürzt), der ein wenig älter ist.

Im Text sind zahlreiche Literaturhinweise gegeben, die sich auf das Literaturverzeichnis auf Seite 19 beziehen. eine Nummer in eckigen Klammern weist auf ein solches Literaturzitat hin. So bedeutet [16] einen Hinweis auf das Buch *Harry Potter und der Stein der Weisen*.

Einige schöne Spiele konnten hier in dem Text nicht abgebildet werden, da sie bereits in Büchern vorkommen. Das Urheberrecht verbietet, Bilder aus Büchern einfach zu übernehmen. Aus diesem Grunde wurden die betreffenden Bücher zitiert und Web-Adressen zu den Themen angegeben, so daß man dann dort nachsehen kann.

# 2 Was machen Mathematiker den ganzen Tag über?

G: Meine Damen, meine Herren!

A: Großvater! Du bist hier nicht in Deiner Vorlesung! Das sind doch alles Kinder!

G: Oh ... Ja. Also: Liebe Kinder!

Ihr habt es gehört, ich bin Mathematiker. Die Mathematik besteht aus den Gebieten Algebra, Geometrie, Analysis, ...

A: Aber Großvater, das interessiert doch hier niemand. Sage uns lieber, was ein Mathematiker so alles macht. Rechnet ihr vielleicht jeden Tag aus, ob  $2 \times 2$  immer noch 4 ist?

G: Nein, natürlich nicht. Wir Mathematiker machen zum größten Teil sehr nützliche Dinge. Ohne Mathematik würde der Airbus A 380 nicht fliegen, der MP3-Player nicht funktionieren und das Handy gäbe es auch nicht ohne Mathematik. Auch für das *Fünfer Olympia Looping* oder die *Wilde Maus* auf dem Hamburger Dom müssen schwierige und komplizierte Berechnungen angestellt werden, um garantieren zu können, daß dieses Gerät auch wirklich sicher und zuverlässig funktioniert. Man kann bei soch komplizierten Systemen nicht jedes Detail ausprobieren. Kein Testpilot würde sich in den Airbus setzen wollen, wenn nicht ganz klar ist, daß das Flugzeug auch sicher fliegen wird und kein Kind würde ein Gerät auf dem Dom benutzen wollen, wenn sie den Betreiber sagen hörten: „Wir haben jetzt etwas Neues eingebaut. Ich bin gespannt, ob das Ding jetzt noch funktioniert oder auseinanderfällt.“ Um die beim Betrieb auftretenden statischen und dynamischen Kräfte zu ermitteln, muß man umfangreiche Systeme von Differentialgleichungen ...

A: Lieber nicht, Großvater! Das ist ja alles hochinteressant, aber wir haben nicht so viel Zeit. Sag uns lieber, was ein Mathematiker alles können muß.

G: Vor allem muß ein Mathematiker eine sehr gute Note in Deutsch gehabt haben.

A: Ich dachte, eher in Mathematik.

G: Nein, ein Mathematiker muß nicht nur exakt denken, sondern sich vielmehr gut und präzise ausdrücken können. Wenn ich zum Beispiel sagen würde: „Diese Stütze sollte halt etwa 2 cm oder so dick sein“, dann ist das eine Formulierung, die man mißverstehen kann. Ist die Stütze nämlich

nur 1.9 cm dick, dann könnte sie bei Belastung knicken, ist sie aber 2.1 cm dick, dann könnte sie zu schwer sein. Sogar kleine Fehler bei der Verständigung können schlimme Folgen haben.

A: Und was hat denn nun Mathematik nun mit Harry Potter und Alice im Wunderland zu tun?

G: Das ist recht einfach. Einmal muß Harry Potter neben vielen anderen Dingen auch Mathematik lernen, oder was ist *Arithmantik* [18, S. 260] denn anderes als eben magische Mathematik? Das *Pentagramm*, das regelmäßige Fünfeck (Abbildung1), ist eine interessante geometrische Figur und seit der Zeit der Pythagoreer, also seit etwa zweieinhalbtausend Jahren, ein magisches Abwehrsymbol. Es ist bei uns auch unter dem Namen *Drudenfuß* bekannt. Den gleichen Namen trägt auch die weiße Mistel.

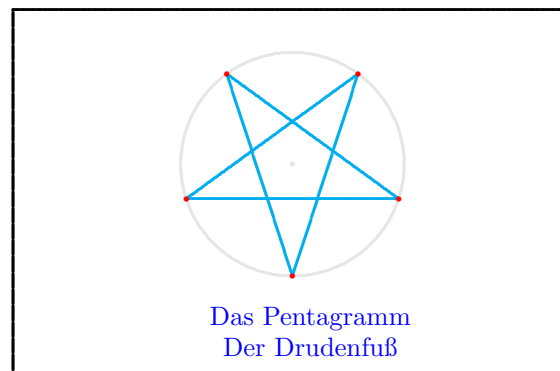


Abbildung 1: Das Pentagramm oder der Drudenfuß.

A: Das ist doch die Pflanze, die ich neulich im Arboretum bei Elmshorn photographiert habe! (Abbildung 2)

G: Richtig, Man sieht auf der Aufnahme auch, daß der Baum, der die Mistel trägt, auf einem Pentagramm wächst.

Übrigens: Die Leser von *Asterix und Obelix* wissen sicher, daß der Druide Miraculix mit einer goldenen Sichel Misteln schneidet. Er braucht sie für seine Zaubertänke [13].

### 3 Ein Streit zwischen Hermine und Ron

G: Aber Mathematik hat noch sehr viel mehr mit Alice und Harry Potter zu tun. So ist das Buch über die Abenteuer von Alice von einem Mathematiker unter dem Künstlernamen Lewis Carroll geschrieben worden. Sein eigentlicher Name war Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898).

Was Harry Potter anbelangt, so weißt Du sicher, daß Hermine immer sehr klar denkt und redet, und daß Ron erst einmal redet oder handelt und danach denkt. Nehmen wir einmal an, Ron habe sich wieder einmal über Hermine aufgeregt und sagt, daß alles, was Hermine sagt, falsch sei, und er läßt sich dazu hinreißen, zu behaupten:

Was Hermine jetzt sagen will, ist falsch!

A: Hermine könnte jetzt antworten:



Abbildung 2: Weiße Mistel (links) auf einem Silber-Ahorn (rechts).

Das ist gar nicht wahr!

So redet man aber doch nur im Kindergarten!

G: Richtig! Da Hermine eben sehr klug ist, sagt sie nur:

Was Ron gesagt hat, ist richtig!

Nun überlegt einmal: Entweder hat Ron recht, dann ist das, was Hermine eben gesagt hat, falsch, also das, was Ron gesagt hat, nicht richtig, also falsch, also hat Ron nicht recht. Hat er aber nicht recht, dann ist die Aussage von Hermine wahr, also hat Ron recht! Es ist eben schon sehr schwierig mit der Sprache. Und eben deshalb sollte ein Mathematiker mit der Sprache perfekt umgehen können, er sollte also schon eine gute Note in Deutsch gehabt haben.

Übrigens: Es waren die Probleme, die solche Sätze darstellen, die 1931 den Mathematiker Kurt Gödel dazu führten, die Grundlagen der Mathematik zu erschüttern.

## 4 Wie Mathematik drei Kamelen das Leben rettet

A: Wechseln wir das Thema! Was macht Ihr denn sonst noch so?

Wir haben ja schon gesehen, daß man mit Mathematik viele nützliche Dinge machen kann. Wozu ist Mathematik eigentlich noch gut?

G: Man kann mit Mathematik viel Spaß haben. Es gibt sehr viele mathematische Aufgabenstellungen, die keinen direkten Nutzen haben, die nur dazu dienen, auf unterhaltsame Weise sich mit Mathematik zu vergnügen. Schon seit den ältesten Zeiten sind solche Aufgabenstellungen der „Unterhaltungsmathematik“ bekannt.

A: Kannst Du uns ein Beispiel geben?

G: Eine sehr alte Geschichte ist die von einem arabischen Kaufmann. Man findet sie in dem Buch von Olivastro [15, S. 53], auch Adrion führt die Geschichte an [1, S. 98–99]. Der Kaufmann hatte in seinem Testament verfügt, daß sein ältester Sohn die Hälfte seiner Kamele erben solle, der mittlere ein Drittel und der jüngste ein Neuntel. Als der Kaufmann gestorben war, betrug sein Besitz aber 17 Kamele.

A: Demnach hätte der älteste Sohn  $8\frac{1}{2}$  Kamele erhalten, der mittlere  $5\frac{2}{3}$  und der jüngste  $1\frac{8}{9}$  Kamele. Das würde doch dann heißen, daß ein oder mehrere Kamele geschlachtet werden müßten.

G: Natürlich hätte ein Sohn eines arabischen Kaufmanns niemals ohne Not ein Kamel geschlachtet, dazu waren diese Tiere zu wertvoll.

A: Ich würde auch nicht wollen, daß ein armes Kamel geschlachtet wird. Gibt es keinen besseren Weg?

G: Eben: Die Mathematik zeigt uns einen Ausweg aus der Situation. Die drei Söhne kannten einen sehr weisen alten Mann. Sie fragten ihn um Rat. Nach längerem Nachdenken – und vielleicht auch Rechnen – sagte der: „Seht, ich bin nicht sehr reich, ich habe nur ein einziges Kamel. Dieses werde ich Euch schenken, und ihr werdet sehen, daß damit alle Eure Probleme gelöst sind.“

A: Es waren nun mit dem Kamel des weisen alten Mannes 18 Kamele. Dann erhält also der älteste Sohn jetzt 9 Kamele, der mittlere 6 und der jüngste 2 Kamele. Das sind insgesamt 17 Kamele.

G: Richtig, es bleibt hier also ein Kamel übrig, und dieses eine Kamel erhält der weise alte Mann zurück, und es sind in der Tat alle Probleme beseitigt.

A: Da kann doch etwas nicht stimmen! Haben wir vielleicht etwas Wichtiges übersehen?

G: Ja und nein. Jetzt kommt die eigentliche Mathematik. Für diejenigen, die in der Schule schon Bruchrechnung hatten, sollte es ganz einfach sein. Es ist nämlich

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9 + 6 + 2}{18} = \frac{17}{18},$$

der Vater hat in seinem Testament nicht wirklich **alle** seine Kamele an seine Söhne vererbt, sondern nur  $\frac{17}{18}$  seiner Kamele. Wenn der Vater nicht 17, sondern 18 Kamele besessen hätte, dann wäre bei Teilung nach dem Testament ein Kamel übriggeblieben, welches keinem der drei Söhne vererbt worden wäre, wie wir gesehen haben. Man könnte es auch so sehen: Du hattest ausgerechnet, daß der älteste Sohn  $8\frac{1}{2}$  Kamele, der mittlere  $5\frac{2}{3}$  und der jüngste  $1\frac{8}{9}$  Kamele erhalten. Wenn alle drei Söhne sich einig sind, daß kein Kamel geschlachtet werden soll, dann könnten sie – wenn sie klug sind – zunächst einmal beschließen, daß der älteste auf ein halbes Kamel verzichtet und 8 Kamele nimmt, der mittlere verzichtet auf  $\frac{2}{3}$  eines Kamels und nimmt 5 Kamele und der jüngste verzichtet auf  $\frac{8}{9}$  eines Kamels und begnügt sich mit einem.

A: Damit wären  $8 + 5 + 1 = 14$  Kamele schon einmal verteilt, und es bleiben drei übrig. Wenn man jetzt jedem der drei Söhne noch ein Kamel gibt, dann hat jeder mehr bekommen, als ihm nach dem Testament zusteht, aber es muß kein armes Kamel geschlachtet werden. Das finde ich sehr gut!

## 5 Ein Zwerg verschwindet

A: War das nun alles, was Mathematiker so tun?

G: Zuweilen zaubern wir auch.

A: Aber Du hast doch gar keinen Zauberstab!

G: Nun ja, ich bin auch nicht wirklich ein Zauberer.

A: Ein Zauberer muß doch auch Dinge verschwinden lassen können. In dem Buch *Alice im Wunderland* [7] verschwindet zum Beispiel die Cheshire-Katze allmählich, während Alice hinschaut. Auch in den Büchern von Harry Potter verschwinden Menschen und Dinge. Könntest Du zum Beispiel einen Elefanten verschwinden lassen?

G: Ja, hast Du zufällig einen Elefanten bei Dir? Aber im Ernst, ein Elefant wäre mir doch ein wenig zu groß, und ich kann ja nicht wirklich zaubern. Wir brauchten etwas kleineres, etwa einen ...

A: Einen Zwerg?

G: Ja, richtig, einen Zwerg! Es gibt einen sehr hübschen Trick, der von dem großen Magier Alexander Adrion in seinen Büchern über Zauberei beschrieben wird [2, S. 240–241] (ebenfalls in dem Buch [1] ist dies Spiel enthalten<sup>1</sup>). Man hat ein Bild, auf dem fünfzehn Zwerge dargestellt sind. Wenn man das Bild geeignet in drei Teile zerschneidet und diese dann wieder neu zusammenfügt, dann sind es nur noch vierzehn Zwerge.

Alexander Adrion gibt eine Anzahl von Experimenten an, die er vergeblich mit diesem Zwergenspiel unternommen hat. Er kann sich nicht erklären, wie es funktioniert und hält es für „durchaus magisch“ [2, S. 241]

A: Aber Du als Mathematiker mußt doch wissen, was geschehen ist!

G: Das schon, aber wir Mathematiker versuchen es immer am liebsten zunächst an einfachen Aufgaben, und Du mußt zugeben, daß Zwerge nicht einfach sind. Darf ich erst einmal zur Veranschaulichung Striche beziehungsweise Balken wählen?

A: Gut! Aber vergiß die Zwerge nicht!

G: Schaut Euch einmal das linke Bild in Abbildung 3 an. Wir sehen zehn senkrechte Balken. Wenn wir das Bild in der Mitte längs der dünnen Linie zerschneiden und die obere Hälfte ein wenig nach links verschieben, dann erhalten wir das rechte Bild, und dieses enthält nur noch neun Balken, ein Balken ist also verschwunden!

A: Das ist ja nun sehr simpel!

G: Um die Lage etwas zu verwirren, mischen wir die Balken geschickt. Das ist nicht ganz einfach, man muß schon etwas überlegen und probieren. Sieh Dir jetzt einmal Abbildung 4 an. Links haben wir zehn Balken. Schneidet man die linke Figur an den dünnen Linien auseinander und vertauscht dann die beiden oberen Teile, dann sind es nur noch neun Balken.

A: Das ist doch auch kein schwieriger Trick. Wenn man in der linken Abbildung 4 etwa den zweiten Balken von links ansieht und wenn man sich überlegt, was aus ihm wird, dann ist die Sache doch sonnenklar!

---

<sup>1</sup>Adrion gibt in seinem Buch [2] an: Das Original-Puzzle »The Vanishing Leprechaun«, 20 × 49 cm, kann bei W. A. Elliott Co., 212 Adelaide St. W., Toronto M5H 1W7, Kanada bezogen werden.

Noch einfacher: Man kann das Spiel aus dem Internet unter der Adresse

<http://www.planetperplex.com/en/item26> beziehungsweise

<http://www.planetperplex.com/en/sliding-puzzles.html> herunterladen.

In der Ausstellung *mini-Mathematicum*, die vom 6. 10. 2008 bis zum 10. 10. 2008 in der Grundschule Mittlerer Landweg zu sehen ist, ist dieses Spiel auch zu finden. Man kann dort ein ähnliches Spiel (Der Wundermann) erwerben.

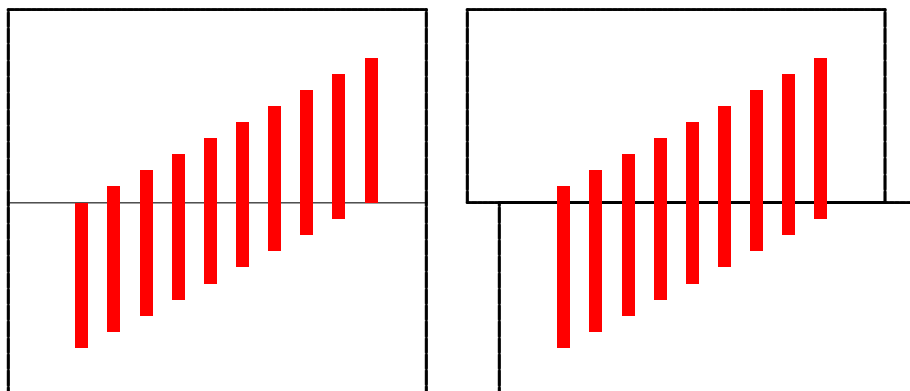


Abbildung 3: Ein Balken verschwindet – erster Versuch.

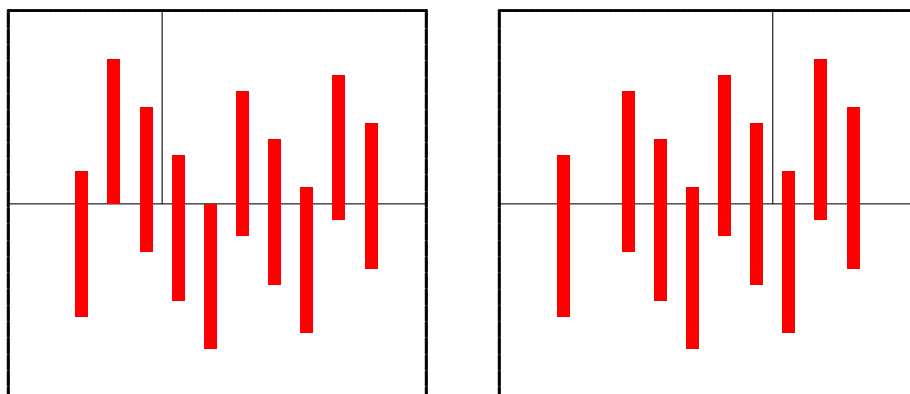


Abbildung 4: Ein Balken verschwindet – zweiter Versuch.

G: Für Dich! Du bist aber auch besonders klug.

Doch nun zurück zu den Zwergen. Wenn wir das Zwergenspiel nun genau betrachten, dann sehen wir, daß im zweiten Bild ein Zwerg völlig verschwunden ist und daß fast alle Zwerge ein wenig länger geworden sind.

In dem Buch *Mathematik und Magie* von Martin Gardner [12, Kapitel 7. Geometrisches Verschwinden – Teil 1, S. 136–148] findet man eine ausführliche Beschreibung des Tricks und viele Varianten. Eine sehr hübsche Variante des Problems des verschwindenden Zwerges stammt von von Mel Stover. Sie ist ebenfalls in dem Buch von Gardner zu finden [12, S. 147]. Dieser Trick ist in Abbildung 5 dargestellt. Auch hier muß man das vorgegebene Bild entlang der eingezeichneten Linien zerschneiden. Setzt man das Bild einmal so zusammen wie in der rechten Bildhälfte angedeutet ist, und dann so, wie in der linken Hälfte gezeigt wird, dann hat ein Bleistift die Farbe gewechselt.

A: Hier ist der „Übeltäter“ leicht zu finden. Sieh Dir doch nur einmal den vierten Bleistift von links in beiden Teilbildern an!

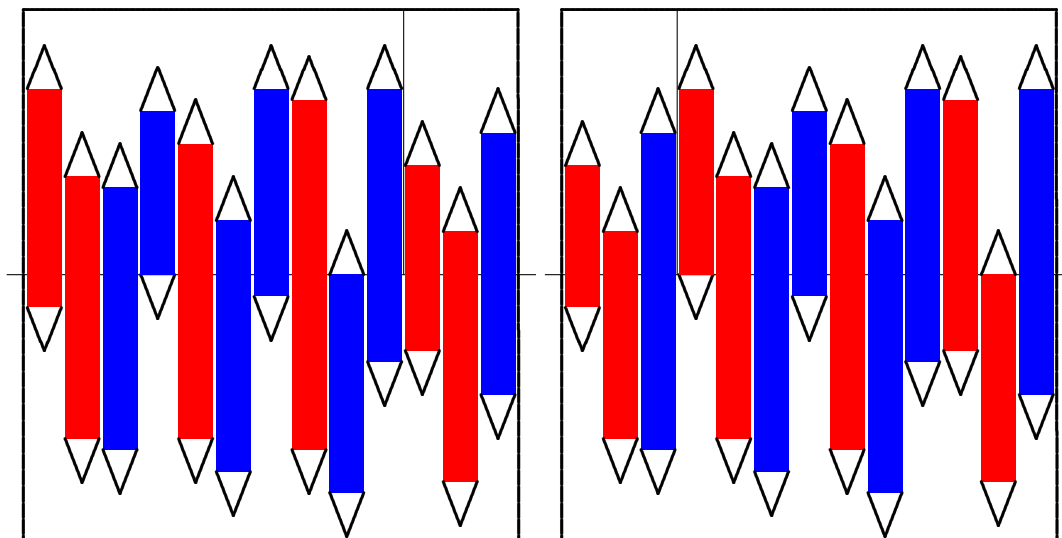


Abbildung 5: Ein Bleistift wechselt seine Farbe.

## 6 Möbiusband

A: Kannst Du uns jetzt etwas richtig Mathematisches zeigen?

G: Zunächst einmal: Alles, was ich Euch bis jetzt gezeigt habe, hatte etwas mit Mathematik zu tun.

A: Aber nicht mit der Mathematik, die wir in der Schule gelernt haben.

G: Richtig, ich gehe aber nicht mehr in die Schule und darf mir die Mathematik aussuchen, die mir Spaß macht.

Ein sehr schönes Gebiet der Mathematik ist die *Topologie*.

A: Großvater, Du solltest doch keine Fachausdrücke benutzen! Lassen wir Deine Topologie, bringe uns lieber ein schönes Beispiel.

G: Mit einem einfachen Papierstreifen, etwas Klebstoff und einer Schere kann man interessante mathematische Experimente ausführen. Dazu brauchten wir aber gleich vier mutige Personen aus dem Publikum.

(Die Assistentin bittet vier mutige Personen nach vorn).

G: Die erste mutige Person erhält einen Papierstreifen wie in Abbildung 6, der zu einem Papierring zusammengeklebt ist, jedoch wurde der Streifen vor dem Zusammenkleben um eine halbe Drehung gedreht, das heißt, die Ecke A kommt direkt auf die Ecke C und B kommt auf D. Man erhält ein Gebilde, das wie in Abbildung 7 aussieht. Ein solches Band wird von den Mathematikern als *Möbiusband* bezeichnet nach dem Mathematiker und Astronomen August Ferdinand Möbius (1790 – 1868).

Die zweite mutige Person erhält einen Streifen, den wir vor dem Zusammenheften um eine ganze Drehung drehen. Bei dem gedrehten Streifen kommt also wieder B auf auf die Rückseite von C und A auf auf die Rückseite von D.

Die dritte mutige Person erhält ein Doppelgebilde, welches aus zwei aneinandergeklebten Streifen besteht, wie in Abbildung 8 gezeigt.

Die vierte mutige Person schließlich erhält auch ein Doppelgebilde, welches aus zwei Möbiusbändern zusammengeklebt ist, die zueinander spiegelbildlich gedreht sind [5, S. 81–82, Zwei Herzen].

Wenn jetzt jede unserer hilfreichen Personen aus dem Publikum den Streifen längs der Mittellinien aufschneidet, was wird dann wohl geschehen. Hat jemand eine Ahnung?

...

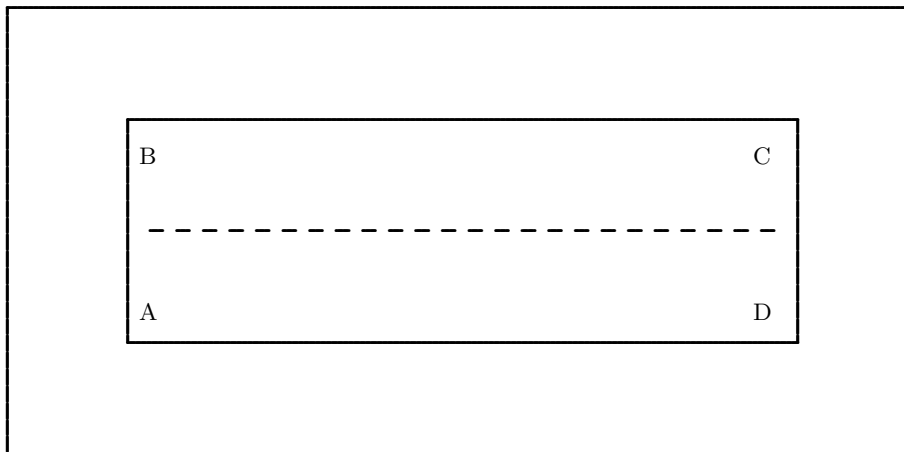


Abbildung 6: Der Papierstreifen vor dem Zusammenkleben.

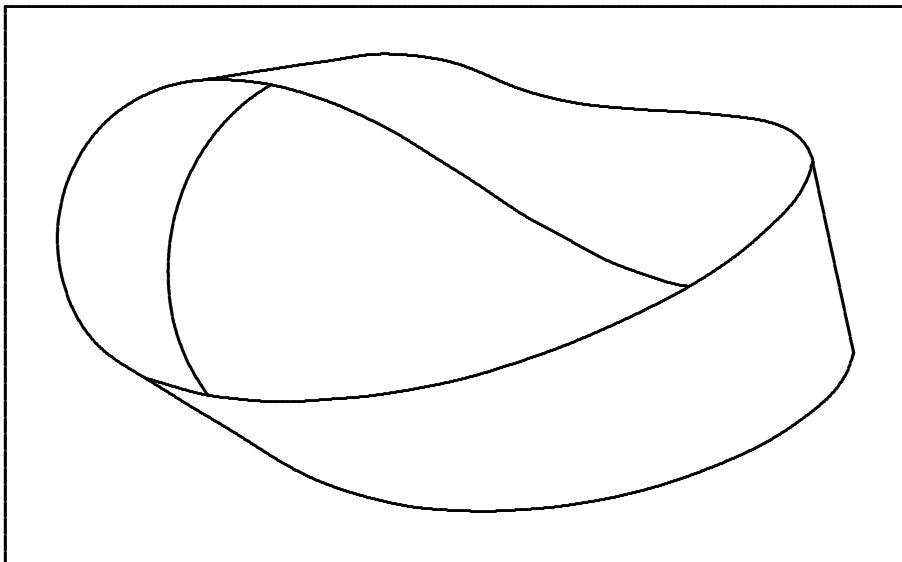


Abbildung 7: Das zusammengeklebte Möbiusband.

G: Man kann noch zahlreiche weitere Experimente mit überraschendem Ausgang mit solchen Bändern machen (siehe etwa [5, S. 77–80, Das Möbiusband]). Wenn Ihr das versuchen möchtet,

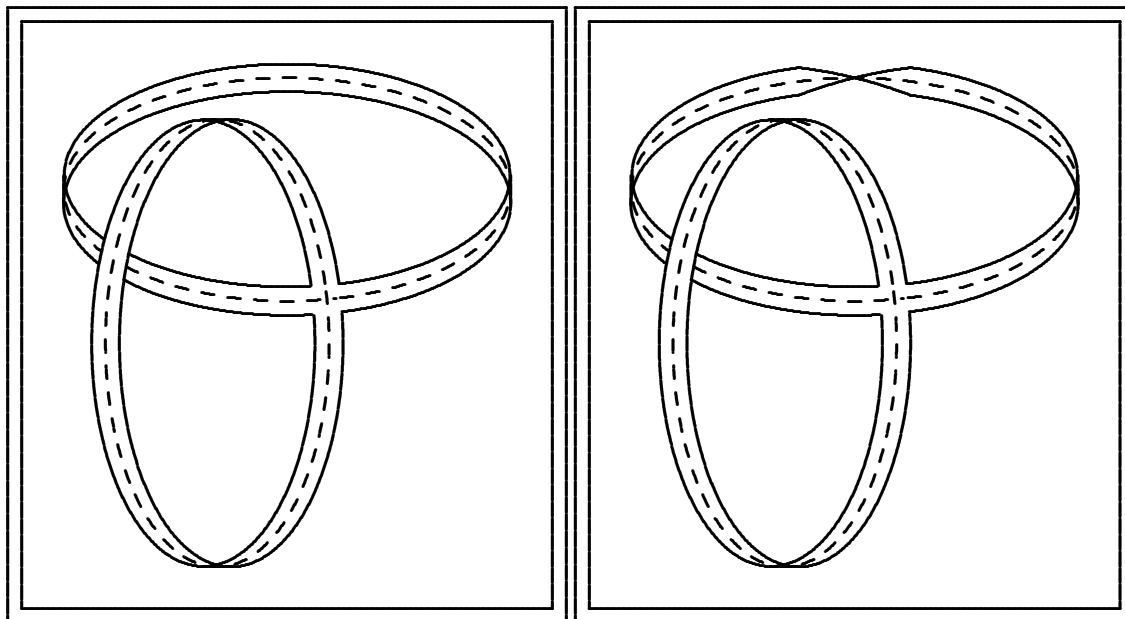


Abbildung 8: Die Gebilde von Gardner.

solltet Ihr das Papierband recht lang machen, sonst gibt es Schwierigkeiten beim Zusammenkleben. Einige Beispiele für Experimente:

- Was geschieht, wenn man das ursprüngliche Möbiusband, nachdem man es längs der Mittellinie zerschnitten hat, noch einmal längs der Mittellinie zerschneidet?
- Was geschieht, wenn man vor dem Zusammenkleben das Band anderthalbmal, zweimal, ...dreht?
- In Abbildung 9 ist wieder ein Papierstreifen dargestellt. Was geschieht, wenn man ihn nach Art eines Möbiusbandes nach einer halben Drehung des einen Endes zusammenklebt und dann längs der gestrichelten Linien aufschneidet?
- In dem Buch *Mathematik und Magie* von Martin Gardner findet man zahlreiche schöne Tricks, die man mit komplizierteren Möbiusbändern ausführen kann [12, Die afghanischen Bänder, S. 92–98].
- In dem Buch *Mathematische Hexereien*, welches ebenfalls von Martin Gardner stammt [10, S. 142], findet man unser aus zwei Papierringen zusammengeklebtes Doppelband (Abbildung 8, linkes Teilbild). Wir haben gesehen, was geschieht, wenn wir es entlang der gestrichelten Linie aufschneiden. Noch überraschender wird es, wenn wir das rechte Gebilde betrachten. Eines der beiden Bänder ist nach Art eines Möbiusbandes gedreht. Was erwartet Ihr, geschieht beim Aufschneiden? Wir haben schon gesehen, was geschieht, wenn man zwei Möbiusbänder, die zueinander spiegelbildlich sind, auf diese Weise zusammenklebt. Was geschieht, wenn man zwei Möbiusbänder, die gleichsinnig gedreht sind, zusammenklebt? Probiert es doch einmal zu Hause aus!

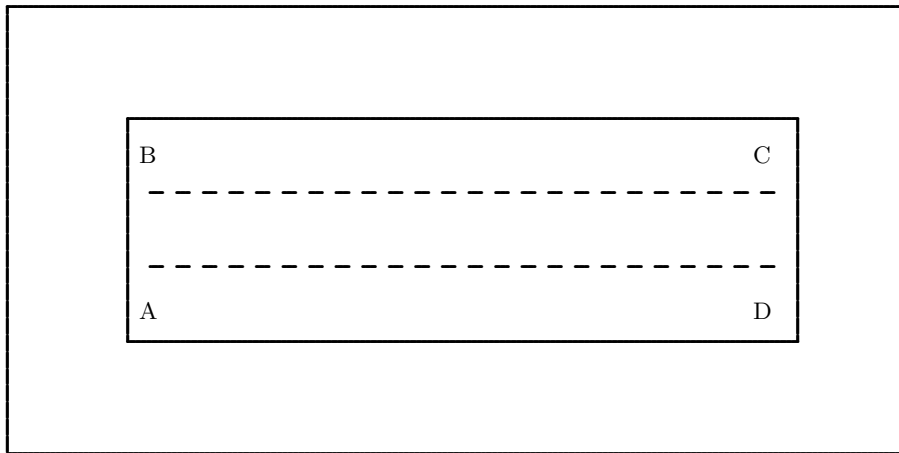


Abbildung 9: Ein Möbiusband mit zwei Schnittlinien.

## 7 In einem Irrgarten

A: Ich habe eine Frage: In dem Buch *Harry Potter und der Feuerkelch* nimmt Harry Potter am trimagischen Turnier teil. Als dritte Aufgabe muß er sich in einem Irrgarten zurechtfinden [19, S. 633 ff]. Haben etwa Irrgärten auch etwas mit Mathematik zu tun?

G: Wir Mathematiker – und auch unsere Kollegen, die Informatiker – lieben Irrgärten oder Labyrinth, wie man sie auch nennt, aus verschiedenen Gründen, und ich möchte gern noch einige Worte über Irrgärten sagen.

A: Im letzten Urlaub habe ich Kreta besucht, dort gab es ein ganz berühmtes Labyrinth.

G: Du kennst natürlich die dazu gehörige Geschichte [23, S. 183 f., Theseus bei Minos].

Der König Minos von Kreta ließ von dem berühmten Baumeister Daidalos ein Labyrinth bauen, in welches er ein Ungeheuer, den Minotaurus, einschloß. Die Stadt Athen mußte jedes neunte Jahr sieben Jünglinge und sieben Jungfrauen bringen, die dem Minotaurus geopfert wurden. Prinz Theseus verfügte sich freiwillig unter die Geiseln, um den Minotaurus zu töten und den schaurigen Opferkult zu beenden. Als er nach seiner Ankunft auf Kreta Minos Tochter Ariadne kennenlernte, verliebten sich beide ineinander. Theseus vertraute ihr seine Absicht an, und sie bot ihm ihre Hilfe an, falls er sie heiraten und nach Athen mitnehmen würde. Als er einwilligte, schenkte sie ihm das magische Wollknäuel des Daidalos, mit dem er aus dem Labyrinth jederzeit wieder herausfand.

A: Theseus hatte also drei Aufgaben zu erledigen. Er mußte im Labyrinth den Minotaurus finden, dann mußte er diesen erschlagen und schließlich mußte er wieder herausfinden. Die erste Aufgabe war nicht sehr schwer zu lösen, denn wenn Theseus den Minotaurus nicht fand, dann fand eben der Minotaurus Theseus. Die zweite Aufgabe war ebenfalls nicht allzu schwer, denn schließlich war Theseus ein Held, und für einen Helden ist es eine Kleinigkeit, ein Ungeheuer zu erlegen. Für die dritte Aufgabe hatte er das Wollknäuel.

Aber wenn ich mich nun in einem solchen Irrgarten, etwa in einem Maislabyrinth zurechtfinden möchte, ohne daß ich ein Wollknäuel mitnehme, was kann ich da tun?

G: In Abbildung 10 ist ein sehr einfacher Irrgarten dargestellt. Eine einfache Regel, die man oft in Büchern über Irrgärten findet, ist die *linke-Hand-Regel*. Man berührt beim Eingang die linke Wand des Irrgartens mit der linken Hand und geht so durch den Irrgarten, daß man ständig mit der linken Hand in Kontakt mit der Wand bleibt. Bei einer Verzweigung wird man dann unter den gegebenen Möglichkeiten immer den am weitesten links liegenden Gang betreten. Man könnte natürlich auch eine *rechte-Hand-Regel* anwenden. In Abbildung 11 ist die Anwendung der *linke-Hand-Regel* dargestellt. Ihr könnt Euch zu Hause leicht davon überzeugen, daß man wieder auf dem gleichen Weg zurückkommt, wenn man am Ziel wendet und die rechte Hand-Regel benutzt. Ein Wollknäuel wäre also eigentlich gar nicht notwendig. Bei den meisten Irrgärten funktionieren diese einfachen Regeln sehr gut. Man kommt mit ihrer Hilfe zum Zentrum des Irrgartens und auch wieder heraus, allerdings nicht unbedingt, wie das Beispiel zeigt, auf dem kürzesten Wege.

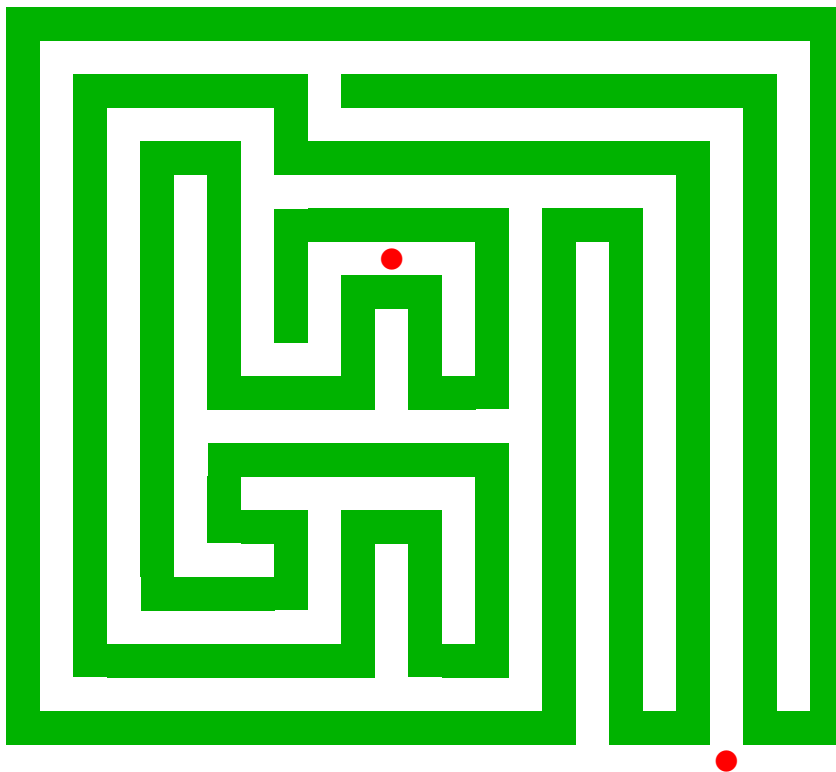


Abbildung 10: Ein einfacher Irrgarten – Start und Ziel sind durch je einen roten Punkt markiert.

A: Funktioniert die Methode „immer links“ denn immer?

G: Es gibt Irrgärten, bei denen man auf diese Weise nicht zum Ziel kommt. Einer dieser Irrgärten ist das sogenannte Heckenlabyrinth von Chevening in der englischen Grafschaft Kent. Es wurde von Charles Stanhope, dem 3. Earl Stanhope (1753 – 1816), der sich intensiv mit Mathematik beschäftigt hatte, entworfen und um 1820 realisiert [26]. In Abbildung 12 ist dieser komplizierte Irrgarten dargestellt.

Wenn wir die *linke-Hand-Regel* anwenden, die uns bei dem einfachen Irrgarten so gut geholfen hat, dann kommen wir immerhin wieder aus dem Labyrinth heraus, ohne allerdings den Zielpunkt

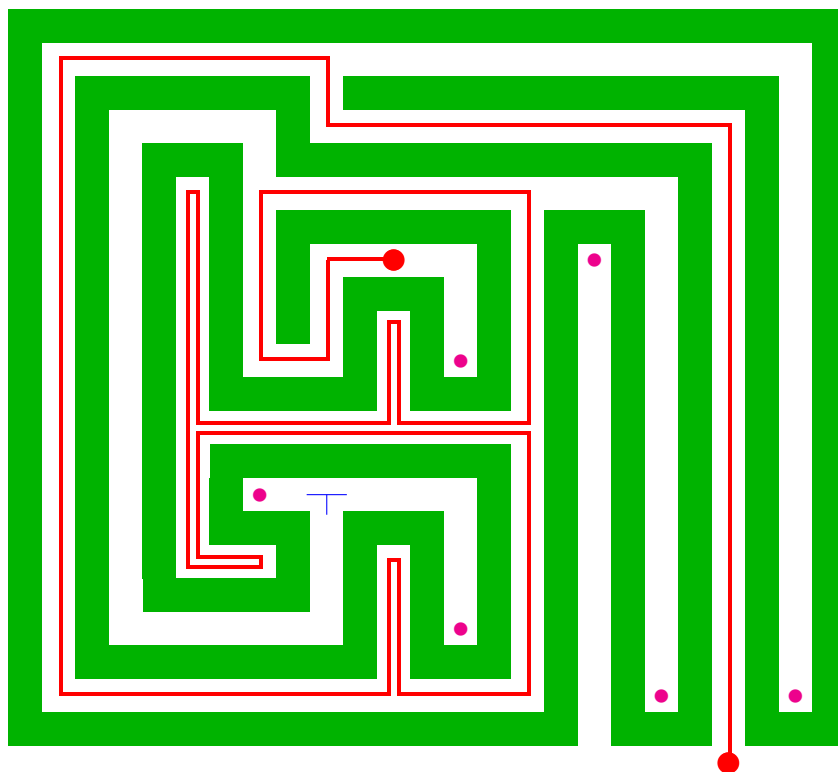


Abbildung 11: Ein einfacher Irrgarten – Anwendung der Regel „immer links“.

gefunden zu haben (Abbildung 13). Ähnlich ergeht es uns, wenn wir die *rechte-Hand-Regel* wählen. Daß es tatsächlich einen Weg vom Start zum Ziel gibt, sieht man in Abbildung 14.

Was macht dieses Heckenlabyrinth so kompliziert? In Abbildung 15 sind die zusammenhängenden Stücke der begrenzenden Hecke farbig unterschieden. Man sieht, daß die Hecke aus sieben Teilen oder „Inseln“ besteht. Wendet man die Strategie „immer links“ oder auch „immer rechts“ an, dann umrundet man den in der Abbildung violett dargestellten Teil und gelangt niemals zu dem schwarz dargestellten Teil der Hecke, in dem ja das Ziel liegt.

Übrigens: Auch für solch komplizierte Irrgärten wie das Heckenlabyrinth von Chevening gibt es Methoden, von Start zum Ziel (und wieder zurück) zu kommen. Solche Methoden sind natürlich etwas komplizierter als die geschilderte einfache Strategie.

## 8 Drei Kinder im Kino

A: Was macht ihr Mathematiker denn nun sonst noch den lieben langen Tag? Rechnet ihr vielleicht von morgens bis abends schwierige Rechenaufgaben aus?

G: Nein, das wäre doch zu langweilig. Um die Wahrheit zu gestehen, es gibt viele Mathematiker, die gar nicht gut rechnen können. Außerdem haben wir Mathematiker inzwischen auch gelernt,

mit Taschenrechnern umzugehen. Viel wichtiger, als richtig zu rechnen ist, die *richtigen Aufgaben* zu rechnen.

A: Was soll denn das heißen?

G: Es gibt eine alte Geschichte, die mit wechselnden Personen immer wieder erzählt wird:

Drei Kinder treffen sich gelegentlich, um das gleiche Kino zu besuchen. Als sie wieder einmal in das Kino kommen, zahlt jedes Kind für Eintritt, Popcorn und Getränke zehn Euro. Der Betreiber des Kinos, dem die drei Kinder schon aufgefallen sind, sagt zu seinem Angestellten: „Diese drei Kinder scheinen Stammkunden unseres Kinos zu sein. Heute ist mein Geburtstag, und so will ich ihnen einen Rabatt geben. Hier sind fünf Euro, gib sie den drei Kindern zurück“. Der Angestellte überlegt sich: „Fünf Euro für drei Kinder, das läßt sich schlecht machen. Ich behalte also zwei Euro und gebe jedem Kind einen Euro zurück. Dann sind die drei Kinder glücklich über den Rabatt und ich bin glücklich über die zwei Euro, und mein Chef merkt davon ja nichts.“

A: Das ist aber gar nicht schön von dem Angestellten, einfach zwei Euro einzubehalten!

G: Es ist aber auch wirklich schwer, fünf Euro unter drei Kindern gerecht aufzuteilen. Was hättest Du denn getan?

A: Ich hätte einen Euro dazugelegt und jedem Kind zwei Euro gegeben.

G: Es gibt aber nur wenige Menschen, die so etwas tun würden. Du bist eben besonders lieb! Aber zurück zu unserer Geschichte. Jetzt wird gerechnet! Die Kinder haben zusammen  $3 \times 9 = 27$  Euro bezahlt, der unehrliche Angestellte hat zwei Euro eingesteckt. Das macht zusammen  $27 + 2 = 29$  Euro. Wo ist der verbleibende Euro geblieben?

A: Ja, hier stimmt doch etwas nicht!

G: Richtig, aber was?

Denken wir doch einmal nach. Wir haben zwei Zahlen völlig richtig addiert, aber das Resultat ist offenbar unsinnig. In unserer kleinen Aufgabe tauchten die folgenden Zahlen auf:

|        |                                                   |
|--------|---------------------------------------------------|
| 30 EUR | von den Kindern ursprünglich bezahlt              |
| 25 EUR | bleiben zum Schluß in der Kinokasse               |
| 5 EUR  | Rabatt des Betreibers                             |
| 3 EUR  | erhalten die Kinder zurück                        |
| 2 EUR  | behält der Angestellte                            |
| 27 EUR | haben die Kinder schließlich tatsächlich bezahlt. |

Von diesen Zahlen – wir Mathematiker sprechen von den *Problemdaten* – hatten wir willkürlich zwei herausgegriffen und addiert, nämlich die 27 Euro, die die Kinder „wirklich“ bezahlt haben und die 2 Euro, die der Angestellte einbehalten hat. Die Summe von 29 Euro ist zwar richtig, hat aber keine Bedeutung.

A: Man muß also so rechnen: Die Kinder haben letztlich – nachdem sie von dem Angestellten den Rabatt ausgezahlt bekamen – insgesamt 27 Euro bezahlt. Davon hat der Betreiber des Kinos 25 Euro in seiner Kasse behalten und der unehrliche Angestellte hat zwei Euro in seine Tasche gesteckt, und  $25 + 2$  ergibt 27. Also stimmt alles.

G: Man kann es auch so sehen: Es gibt in der Geschichte drei „Mitspieler“, die Kinder, den Betreiber und den Angestellten. Am Ende der Geschichte haben diese die folgenden Einnahmen beziehungsweise Ausgaben (ein Minus (–) in der letzten Spalte bedeutet eine Ausgabe):

| Mitspieler   | Einnahme | Ausgabe | Summe   |
|--------------|----------|---------|---------|
| Betreiber    | 30       | 5       | 25 EUR  |
| Angestellter | 5        | 3       | 2 EUR   |
| Kinder       | 3        | 30      | –27 EUR |
| <b>Summe</b> |          |         | 0 EUR   |

Buchhalter nennen eine solche genaue Aufstellung der Einnahmen beziehungsweise Ausgaben aller beteiligten Personen eine *Bilanz*.

Es kommt also nicht so sehr darauf an, *irgendwelche* zwei Zahlen korrekt zu addieren, es ist wichtiger, die *richtigen* Zahlen zu addieren.

A: Gut, also Rechnen ist nicht das, was ihr von früh bis abend treibt. Was tut ihr aber dann?

G: Mathematiker spielen sehr gern.

A: Hast Du auch hierfür ein schönes Beispiel?

## 9 In einem Zug

G: Der schon erwähnte Autor von *Alice im Wunderland* [7, 6], Lewis Carroll, war Professor für Mathematik, der auch „seriöse“ Fachbücher geschrieben hat. Er erzählte kleinen Mädchen aus seiner Bekanntschaft gern mathematische Geschichten und führte kleine Tricks vor.

A: Warum Mädchen?

G: Nun, Mädchen eignen sich besser für Mathematik als Jungen, sie sind – normalerweise – ordentlicher, sorgfältiger und sie halten Spielregeln ein. Ihr wißt sicher, daß Hermine in Harrys Klasse genau aus den von mir genannten Gründen die Beste ist.

Nun zu einem Spiel von Lewis Carroll. Er zeichnete eine einfache Figur (siehe Abbildung 16, [11, S. 95–97]) und bat, diese in einem Zug nachzuzeichnen, wobei gefordert wird, daß die gezeichnete Linie sich nicht selbst überkreuzt. Wohlgemerkt, jede Linie der Figur soll dabei einmal und nur einmal durchlaufen werden. Einzelne Punkte dürfen beliebig oft getroffen werden, der Weg darf sich nur nicht kreuzen. Wenn ich Euch jetzt einige Minuten Zeit ließe, könntet Ihr sicher herausfinden, ob das möglich ist und wie man das macht.

Nun sind Mathematiker recht faule Menschen, sie handeln nicht gern, sie denken nur darüber nach, was sie täten, wenn sie handeln würden. Dies ist auch der Grund, warum Mathematiker nicht wirklich zaubern, sie wollen nur wissen, wie das geht. Auch hier, in unserem Beispiel, ist dies so.

A: Was wir jetzt benötigen, ist eine gute Idee, die uns die mühsame Probiererei erspart.

G: Eine solche Idee wäre es, die Figur auszumalen, so daß jede durch die Linien gebildete Fläche entweder ausgemalt ist oder frei bleibt und zwei über eine Linie angrenzende Flächen niemals beide ausgemalt sind oder beide freigeblieben. Dabei soll jede Linie der Figur eine ausgemalte

Fläche beranden. Wenn man einfach anfängt, dann sieht man, daß dies ohne Schwierigkeiten geht. Nun vergessen wir die Linien und versuchen, den Rand der ausgemalten Fläche in einem Zuge und überkreuzungsfrei nachzuziehen.

A: An den Kreuzungspunkten hat man aber die Wahl, beispielsweise rechts oder geradeaus oder links zu gehen.

G: Richtig, um an jedem Kreuzungspunkt eine eindeutige Entscheidung zu finden, mogeln wir ein ganz klein wenig.

A: Darf man das denn in der Mathematik?

G: Schon, man muß nur im Gedächtnis behalten, wo man gemogelt hat und man muß sich hinterher überlegen, ob dies etwas ausgemacht hat oder nicht.

Wir stellen uns vor, daß die ausgemalte Fläche eine Insel sei. Wir wollen zunächst, daß eine Figur entsteht, die keine „Binnenseen“ hat, das heißt, nicht ausgemalte Flächen, die keinen Zugang zum umgebenden Meer haben. Dazu radieren wir etwas von denjenigen Kreuzungspunkten weg, die die freie Durchfahrt behindern. Dabei müssen wir aufpassen, daß es bei einer Insel bleibt. Wenn wir zu viele Kreuzungspunkte wegradieren, zerfällt die Insel in mehrere Inseln. Wer genau hinsieht, wird bemerken, daß diese Mogelei auf verschiedene Weisen geht. Wir legen uns aber jetzt auf eine davon fest. Die restlichen Kreuzungspunkte machen wir ein wenig dicker, so daß immer nur eine eindeutige Entscheidung über die Randlinie möglich ist.

A: Das ist alles viel einfacher im Bild zu sehen, als in Deiner komplizierten Beschreibung. Es ist für die „gemogelte“ Figur ganz einfach, den Rand in einem Zuge zu umfahren. Man folgt dazu nur der „Küstenlinie“ der Insel. Damit hat man aber auch eine Lösung für die ursprüngliche Figur gefunden, man muß nur die „Mogeleien“ wieder rückgängig machen.

G: So einfach war das! Ein Mathematiker hört hier auf, er wird nicht versuchen, den Weg wirklich anzugeben, da er ja überzeugt ist, daß die Methode richtig ist. Was an diesem kleinen Beispiel interessant ist, sind die Fragen, die ich gar nicht aufgeworfen habe:

- Kann man jede Figur wie beschrieben ausmalen? Offenbar nicht, denn sonst wäre jede noch so komplizierte Anordnung von Linien in einem Zuge nachzeichnenbar, und das ist doch wohl nicht wahr!

Wir kennen alle die bekannte Figur „das Haus vom Nikolaus“ (siehe Abbildung 17). Bei dieser funktioniert die Methode nicht. Warum? Nun, bei dieser Figur gelten andere „Spielregeln“, es dürfen sich die Linien überkreuzen, und dann ist alles ganz anders.

- Durch meine „Mogeleien“ ändere ich die Aufgabe. Das heißt, ich nehme eine nicht ganz einfache Aufgabe her und ändere sie so, daß sie einfach wird. Darf ich das?
- Kann man das immer so machen? Damit Ihr testen könnt, ob Ihr alles verstanden habt, versucht doch einmal, die Figur aus vier Kreisen in Abbildung 18 nach dieser Methode in einem Zuge nachzuzeichnen. Diese Figur stammt von T. H. O’Beirne [11, S. 94]. Eine kompliziertere Figur findet man in einem Buch von Wolff [27, S. 180] (Abbildung 19).

## 10 Blöcke stapeln

G: Man kann mit Spielkarten sehr hübsche Tricks ausführen. Betrachten wir zunächst einmal einfache Holzblöcke in Quaderform, die also wie Ziegelsteine geformt sind. Wir nehmen zwei

gleichgroße solche Blöcke her und versuchen, den zweiten so auf den ersten zu legen, daß er nicht herunterfällt und daß er möglichst weit übersteht. Es ist wohl ganz klar, daß das so lange gut geht bis der obere Block genau zur Hälfte übersteht.

A: Das leuchtet schon ein, aber Blöcke doch keine Karten!

G: Gemach, die Karten kommen schon noch. Wir versuchen jetzt, die beiden aufeinandergestapelten Blöcke so auf einen dritten zu legen, daß der oberste Block so weit wie möglich überhängt. Wie wir Mathematiker wissen, muß dann der zweite Block den untersten um  $\frac{1}{4}$  der Blocklänge überragen. Nun können wir das Ganze noch weiter treiben und die drei Blöcke auf einen vierten legen. Wenn der unterste der drei den vierten um  $\frac{1}{6}$  überragt, geht noch alles gut. Wenn wir immer so weiter machen, dann steht der oberste der Blöcke um

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots$$

über, wobei die drei Punkte sagen sollen, daß man dies so lange weiter treiben soll, als man Blöcke aufeinander setzt. Es ist nicht schwer, zu erraten, wie es weiter gehen muß (siehe Abbildung 20).

Ihr könnt selbst ein kleines Experiment ausführen: Legt eine Münze so auf den Tisch, daß sie um  $\frac{1}{8}$  ihres Durchmessers übersteht. Um konkrete Zahlen zu haben: Ein Euro hat einen Durchmesser von 2.32 cm. Ein Achtel dieses Wertes ist 0.29 cm oder 2.9 beziehungsweise knapp 3 mm. Darauf legt Ihr eine Münze, die über die erste um  $\frac{1}{6}$  ihres Durchmessers, bei der Euro-Münze also um 0.387 cm oder 3.87 mm über den äußersten Punkt der ersten Münze hinausragt. Darauf kommt eine Münze, die die zuletzt hinzugefügte um  $\frac{1}{4}$  des Durchmessers, also um 0.58 cm oder 5.8 mm überragt. Schließlich packen wir auf diesen Stapel eine Münze, die über die letzte Münze um einen halben Münzdurchmesser oder 11.6 mm hinausragt. Dies ist in Abbildung 21 – von oben gesehen – dargestellt. Wie man sieht, befindet sich die letzte Münze völlig außerhalb des Tisches [25, Aufgabe 92].

Wenn Ihr die vier Münzen wie beschrieben übereinanderstapeln wollt, dann ist es sehr wichtig, die angegebenen Abstände möglichst genau einzuhalten, sonst stürzt die letzte Münze ab. Wenn man sie perfekt einhalten würde – und das würde für die erste Münze heißen, daß man sie um 2.9 mm über die Tischkante überstehen ließe, dann müßte man schon sehr genau messen können. Für unsere Zwecke genügt es, wenn sie um knapp 3 mm übersteht. Ebenso kann man mit einem gewöhnlichen Lineal kaum 3.87 mm abmessen. Auch hier können wir uns auf etwas weniger als 4 mm einigen. Die Abstände dürfen auf keinen Fall zu groß werden, und es genügt, wenn man sie auf etwa einen halben Millimeter genau einhält.

A: Ich kann mir nicht vorstellen, daß jemand nach Augenmaß die Münzen auf halbe Millimeter genau aufeinanderpacken kann.

G: Das kann ich auch nicht. Ich habe einen kleinen Trick benutzt und mir aus Pappe eine Schablone wie in Abbildung 22 ausgeschnitten. Ihr könnt die Schablone aus der Abbildung verwenden, indem Ihr sie auf nicht zu dicke Pappe klebt.

Versucht es doch einmal, allerdings sollte man eine ruhige Hand besitzen und nicht gleich ungeduldig werden.

A: Wann kommen denn nun endlich die Karten?

G: Jetzt! Ein Rommé-Spiel enthält 55 Karten. Was meint Ihr, wie weit die oberste Karte überstehen würde, wenn man sie geschickt aufeinanderlegen würde?

...

G: Mit einem einfachen Computer kann man das ganz leicht ausrechnen. Man erhält einen Überhang von etwa  $2\frac{1}{4}$  Karten. Es wird behauptet [11, S. 159], daß man – mit etwas Geschick und ruhiger Hand – leicht einen Überhang von 2 Karten, das sind 9 cm, erzielen kann.

A: Wenn man jetzt aber noch mehr und immer mehr Karten aufeinanderstapeln würde, wie groß könnte man den Überhang machen?

G: Was meint Ihr?

...

G: Wir lernen in der Mathematik im ersten Semester, daß diese Summe beliebig groß gemacht werden kann.

A: Das glaube ich nicht!

G: Es klingt auch unglaublich.

A: Man könnte also einen Überhang von, sagen wir, einem Meter erzeugen?

G: Das und noch mehr. Ein kluger Mensch hat einmal ausgerechnet, wieviele Karten man benötigen würde, um einen Überhang von 50 Kartenlängen zu erhalten [11, S. 159]. Eine normale Spielkarte hat eine Höhe von 8.75 cm. 50 Kartenlängen entsprechen demgemäß 4.375 m. Stell Dir vor, daß ein solcher Kartenstapel fast 5 m über die Tischkante herausragen würde. Das Problem ist nur, daß man sehr viele Karten brauchen würde. Nach den Berechnungen des klugen Mathematikers bräuchte man

15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497

Karten! Ich werde jetzt nicht versuchen, diese Zahl vorzulesen. Sie hat immerhin 44 Stellen! Für solche Monster gibt es keine Namen.

A: Nein, das wollen wir alle nicht. Aber vielleicht kannst Du diese gigantische Zahl ein wenig veranschaulichen?

G: Wir versuchen einmal, auszurechnen, wie hoch ein Kartenstapel sein würde der so viele Karten enthält. Was meint Ihr?

...

G: Nun, der Stapel wäre wahrhaft unvorstellbar hoch. Man kann die Höhe auf einem Computer oder einen Taschenrechner leicht ausrechnen. Das Resultat ist ebenfalls eine Zahl, die keinen Namen hat. Die Anzahl der Kilometer, die der Stapel hoch ist, beginnt mit einer 5 und hat dann 36 weitere Dezimalstellen, wir Mathematiker schreiben das so:  $5 \cdot 10^{36}$  km.

A: Und was bedeutet diese Zahl?

G: Die Astronomen sagen uns, daß unser Universum, soweit wir es beobachten können, einen Durchmesser von etwa  $2 \cdot 10^{23}$  km hat. Auch diese Zahl übersteigt unsere Begriffe, aber sie ist kleiner als die Höhe des Kartenstapels, und zwar unvorstellbar kleiner. Man würde  $10^{13}$  Universen benötigen, um den Kartenstapel aufzunehmen. Eine Billion ist eine Million Millionen, die Zahl der Universen betrüge demnach 10 Billionen!

A: Das ist wirklich unvorstellbar!

## 11 Das Problem der Königsberger Brücken

G: Die Lösung einer ganz berühmten Aufgabe wird dem großen Mathematiker Leonhard Euler zugeschrieben, der von 1707 bis 1783 lebte. Die Stadt Königsberg liegt an dem Fluß Pregel. Durch den Fluß wird die Stadt in vier Teile geteilt. Zwischen den einzelnen Stadtteilen gibt es sieben Brücken, wie in Abbildung 23.a) dargestellt ist. Es war nun im Jahre 1736 – also vor über 250 Jahren – die Aufgabe gestellt worden, einen Spazierweg durch Königsberg zu finden, der über jede der Brücken führt, dabei darf aber keine mehr als einmal überschritten werden.

A: Man könnte jetzt einen Stift nehmen und einfach ausprobieren, ob man einen solchen Spazierweg finden kann.

G: Das ist schon richtig. Wenn es einen solchen Weg gibt, dann wird man ihn auch sicherlich irgendwann durch Probieren finden. Allerdings, man muß unter Umständen, je nach Geschick, schon eine große Zahl von möglichen Wegen untersuchen. Außerdem halten wir Mathematiker eine Lösung, die durch einfaches Ausprobieren gefunden wird, für nicht besonders schön. Und was ist, wenn es *keinen* solchen Weg gibt? Das könnte man auf diese Weise niemals herausfinden.

A: Ja, natürlich, wenn ich nach einige Zeit keine Lösung gefunden habe, könnte es ein, daß es keine gibt, oder aber, daß ich mich vielleicht sehr ungeschickt angestellt habe, und die Lösung nicht gesehen habe. Aber Du hast Leonhard Euler erwähnt. Der hat doch sicher eine gute Idee gehabt!

G: Ja, natürlich. Schließlich war Euler einer der größten Mathematiker seiner Zeit. Er hat nachgedacht und dabei zuerst einmal festgestellt, daß es bei dieser Aufgabe nicht darauf ankommt, wie man genau sich in den Stadtteilen bewegt, ob man auf geradem Weg der Brücke zueilt oder längs gewisser Straßen geht oder aber vielleicht noch einen kleinen Rundgang einlegt. Wirklich wichtig ist nur, über welche Brücke man schließlich den Fluß überquert.

A: Das ist ja klar. Man könnte also gleich so tun, als könne man geradlinig von einem Punkt aus zu der nächsten Brücke laufen. Dadurch wird die Aufgabe wesentlich übersichtlicher.

G: In Abbildung 23.b) sind die möglichen geraden Wege von einem festen Punkt eines jeden Stadtteils zur jeweils nächsten Brücke eingezeichnet. Als zweite Überlegung: Es ist nun nicht mehr so wichtig, wie der Fluß zwischen den Brücken genau verläuft, wir können ihn uns also auch „wegdenken“ (Abbildung 23.c)).

A: Jetzt können wir auch noch die geknickten Wege durch gerade Linien ersetzen, wir müssen uns nur merken, daß zu jeder geraden Linie in Abbildung 23.c) eine Brücke gehört. Damit erhalten wir die nun schon sehr übersichtliche Abbildung 23.d).

G: Betrachten wir nun einmal den Punkt 4 der Abbildung. In diesen Punkt münden drei Wege ein, das heißt, dieser Stadtteil ist über drei Brücken mit den anderen Stadtteilen verbunden. Wenn wir „irgendwie“ zu diesem Stadtteil kommen, dann haben wir eine Brücke überschritten. Wenn wir dann den Stadtteil verlassen, dann ist das nur über eine zweite Brücke möglich. Es verbleibt also nur noch eine Brücke, die noch nicht benutzt wurde. Wenn wir diese irgendwann benutzen, dann sind wir auf dem Stadtteil 4 „gefangen“, denn alle drei Brücken wurden dann schon benutzt. Man könnte sich natürlich vorstellen, daß unsere Wanderung im Stadtteil 4 begann. In diesem Falle hätten wir keine Probleme: Wir könnten den Stadtteil auf einer Brücke verlassen, auf einer anderen wieder betreten und dann auf der dritten verlassen, und danach brauchten wir ihn nicht mehr aufzusuchen.

A: Also: Der Stadtteil 4 kann nur Anfangs- oder als Endpunkt unserer Wanderung sein.

G: Richtig! Nun schauen wir uns die anderen Stadtteile an. Die beiden Stadtteile 1 und 3 sind ebenfalls nur über jeweils drei Brücken erreichbar, Stadtteil 5 über fünf Brücken.

A: Und schon sehen wir, daß die Aufgabe nicht lösbar sein kann. Der Anfangs- oder der Endpunkt muß in 1, 3 oder 4 liegen, es gibt aber nur einen Anfangs- und einen Endpunkt. Wir haben also einen Stadtteil, welcher über drei Brücken erreichbar ist, zuviel!

Ganz schön klug, dieser Euler!

## Literatur

- [1] Alexander Adrion. *Adrion's Zauberkabinett zum Verwundern und Vorführen für jedermann (mit Trickbeigaben)*. Studio DuMont. DuMont Buchverlag, Köln, 1980.
- [2] Alexander Adrion. *Die Kunst zu zaubern. Mit einer Sammlung der interessantesten Kunststücke zum Nutzen und Vergnügen für jedermann*. dumont taschenbücher, 1680. DuMont Buchverlag, Köln, 2. Auflage, 1990.
- [3] W. Ahrens. *Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Erster Band*. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1921.
- [4] *Natürliches Zauber-Buch Oder: Neu-eröffneter Spiel-Platz rarer Künste / in welchem nicht allein alle Taschen-Spieler- und andere curiöse Mathematische und Physicalische Künste sondern auch die gebräuchlichen Karten-Würffel Billard und andere Spiele, aufs genaueste beschrieben, und mit vielen Figuren erläutert werden. Mit Königl. Pohlnisch und Churf. Sächs. Privilegio*. Bey Adam Stein und Gabriel Nicolaus Raspe, Nürnberg, 1745.
- [5] Albrecht Beutelspacher und Marcus Wagner. *Wie man durch eine Postkarte steigt ... und andere spannende mathematische Experimente. Illustrationen von Anna Zimmermann*. Herder, Freiburg im Breisgau [u.a.], 2008.
- [6] Lewis Carroll. *Alice's Adventures in Wonderland and Through the Looking-Glass and what Alice found there. Edited with an Introduction by Roger Lancelyn Green, With Illustrations by John Tenniel*. The World's Classics. Oxford University Press, Oxford, New York, 1971.
- [7] Lewis Carroll. *Die Alice-Romane. Alices Abenteuer im Wunderland. Durch den Spiegel und was Alice dort fand. Mit den Illustrationen von John Tenniel, Übersetzt und herausgegeben von Günther Flemming*. Philipp Reclam jun., Stuttgart, 2002.
- [8] Jean-Paul Delahaye. Mathematische Unterhaltungen: Sudoku oder die einsamen Zahlen. *Spektrum der Wissenschaft*, März 2006:100–106.
- [9] Ch. Elsholtz and A. Mütze. Sudoku im Mathematikunterricht. *Mathematische Semesterberichte*, 54:69–93, 2007.
- [10] Martin Gardner. *Mathematische Hexereien, Denksportaufgaben, Kunststücke, Rätsel, Spiele, mathematische Zauberei*. Ullstein, Berlin [u.a.], 1979.
- [11] Martin Gardner. *Mathematisches Labyrinth. Neue Probleme für die Knobelgemeinde*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1979.
- [12] Martin Gardner. *Mathematik und Magie. 115 Karten- Würfel- und Dominotricks, mathematische Spiele und Zauberkunststücke, Vorwort von Alexander Adrion*. dumont taschenbücher, 106. DuMont Buchverlag, Köln, 1981.

- [13] René Goscinny (Text) und Albert Uderzo (Zeichnungen). *Asterix der Gallier*. Egmont, Berlin, Köln, Nachdruck 2008.
- [14] Michael Kleber. The best card trick. *Mathematical Intelligencer*, 24(1):9–11, Winter 2002.
- [15] Dominic Olivastro. *Das chinesische Dreieck. Die kniffligsten mathematischen Rätsel aus 10 000 Jahren. Aus dem Amerikanischen von Michael Schmidt*. Dromersche Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf., München, 1995.
- [16] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Stein der Weisen. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 1998.
- [17] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Gefangene von Askaban. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 1999.
- [18] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und die Kammer des Schreckens. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 1999.
- [19] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Feuerkelch. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 2000.
- [20] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Orden des Phönix. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 2003.
- [21] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Halbblutprinz. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 2005.
- [22] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und die Heiligtümer des Todes. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 2007.
- [23] Gustav Schwab. *Die Sagen des klassischen Altertums*. Emil Vollmer Verlag, Wiesbaden.
- [24] Hugo Steinhaus. *Kaleidoskop der Mathematik*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.
- [25] Hugo Steinhaus. *100 neue Aufgaben aus der elementaren Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main, 1973.
- [26] Jearl Walker. Experiment des Monats: Labyrinthwandern mit Methode: Wie man sich in einem Irrgarten zurechtfindet und ohne rettenden Ariadne-Faden wieder herausgelangt. *Spektrum der Wissenschaft*, Februar 1987:144–149.
- [27] Th. Wolff. *Der Wettlauf mit der Schildkröte. Gelöste und ungelöste Probleme*. August Scherl G. m. b. H., Berlin S W, 1929.

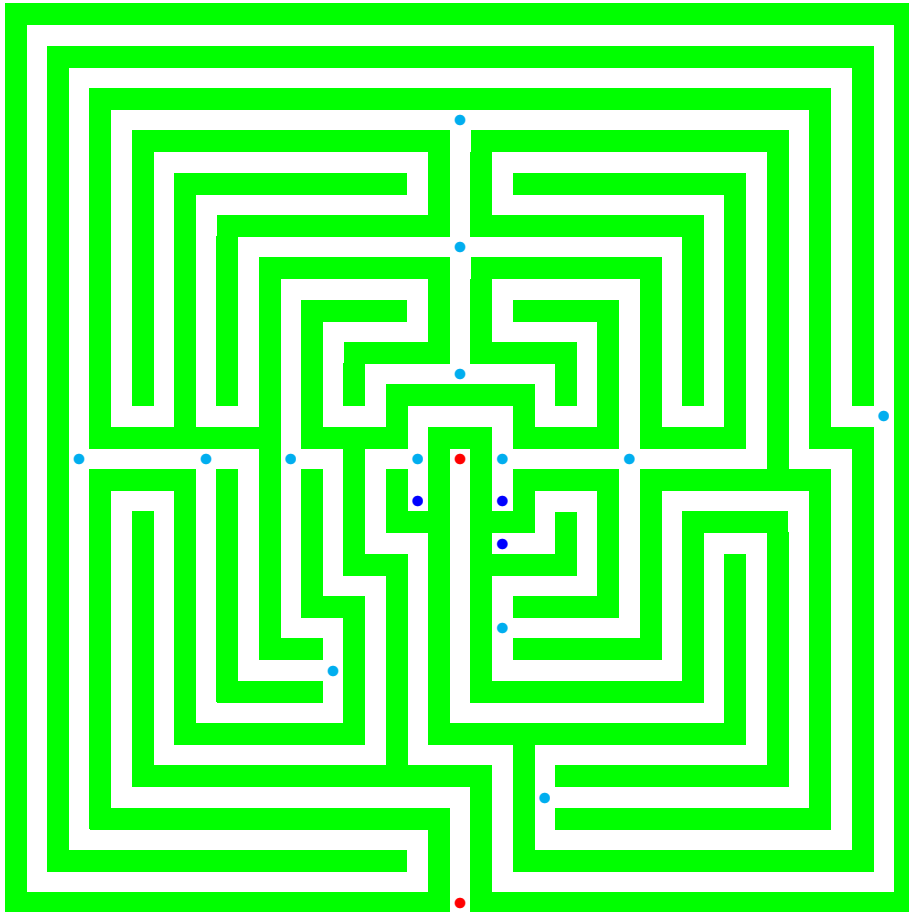


Abbildung 12: Das Heckenlabyrinth von Chevening in der Grafschaft Kent (England).

Start- und Zielpunkt sind **rot** markiert.

Endpunkte von Sackgassen sind **blau** gekennzeichnet.

**Hellblaue** Markierungen bezeichnen Punkte, an denen eine Entscheidung für einen von mehreren möglichen Wegen notwendig ist.

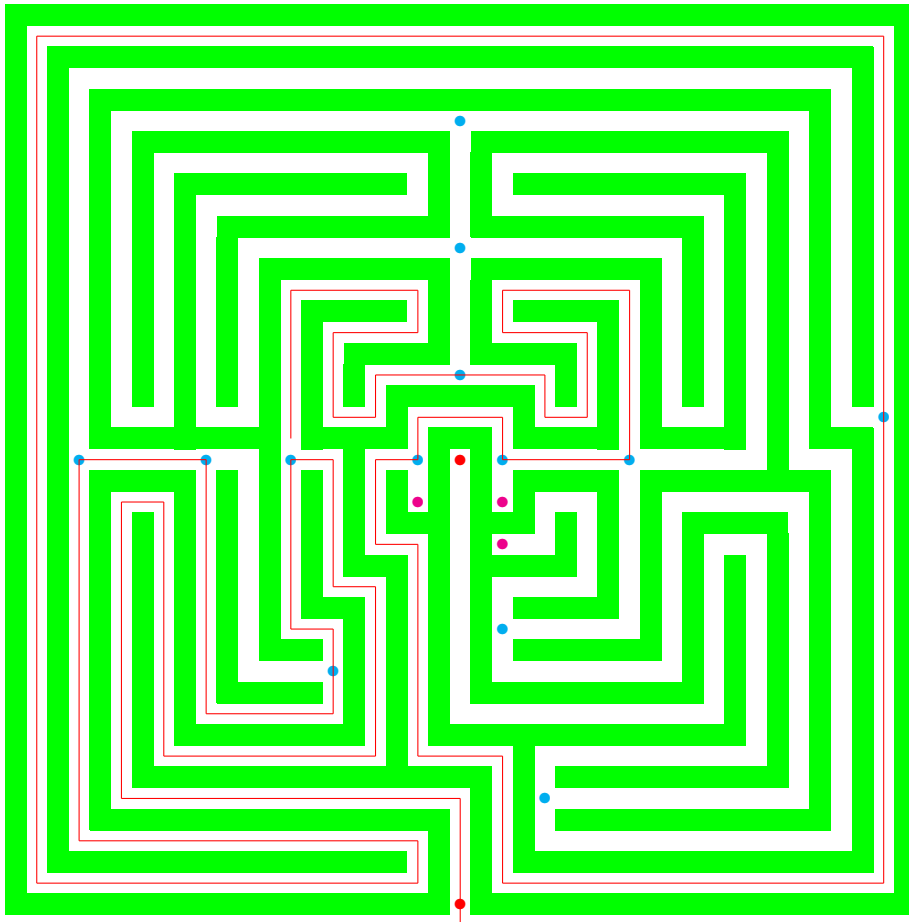


Abbildung 13: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Strategie „immer links“.

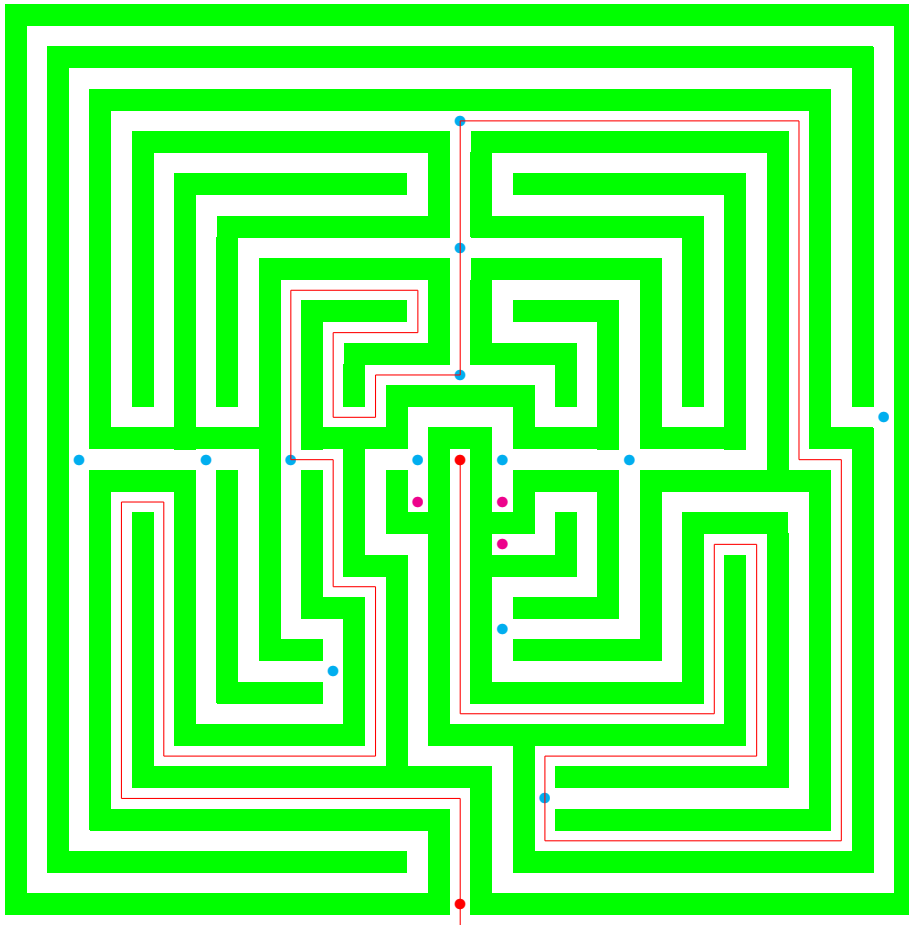


Abbildung 14: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Ein Weg zum Ziel.

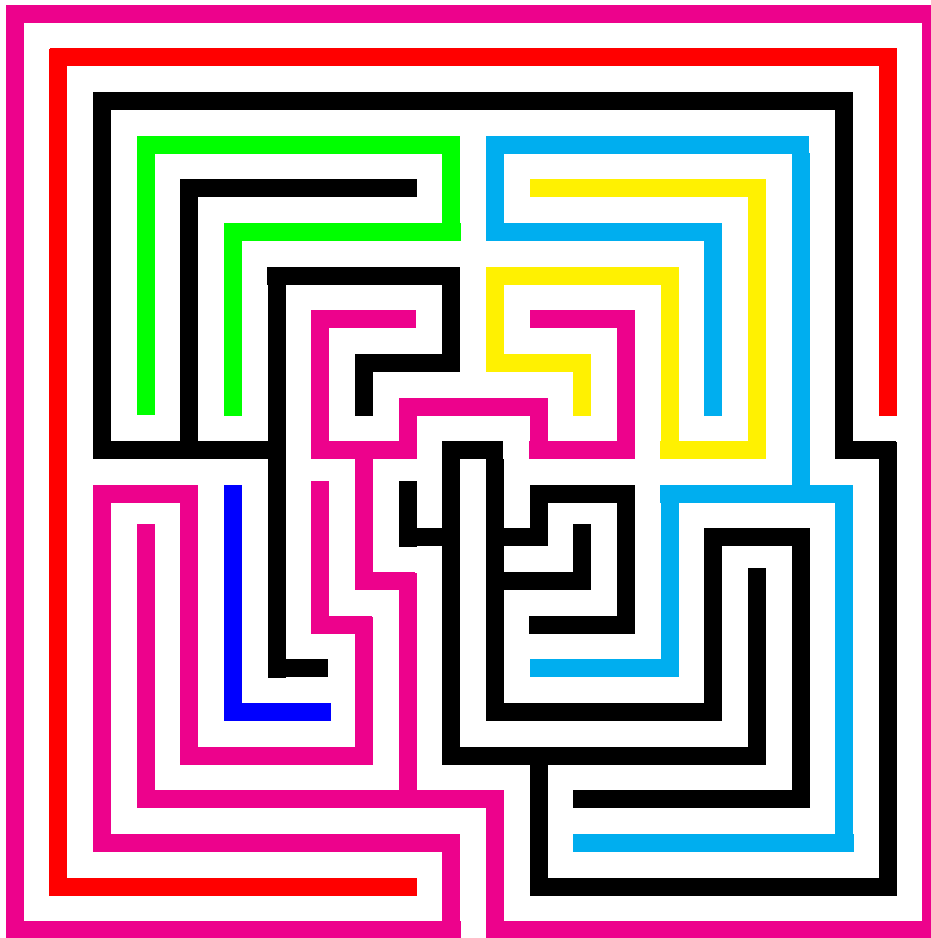


Abbildung 15: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Die sieben zusammenhängenden Teile („Inseln“) des Labyrinths.

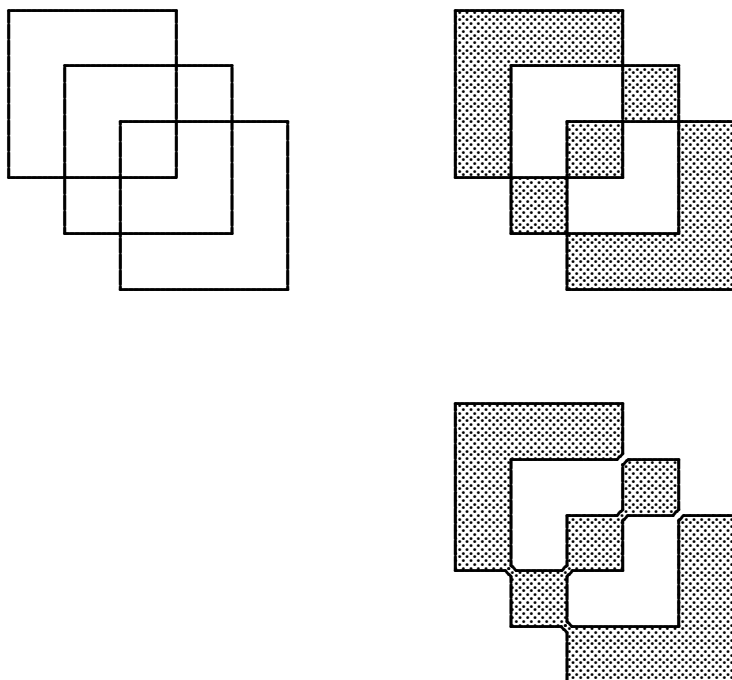


Abbildung 16: Lewis Carolls Problem mit drei Quadraten

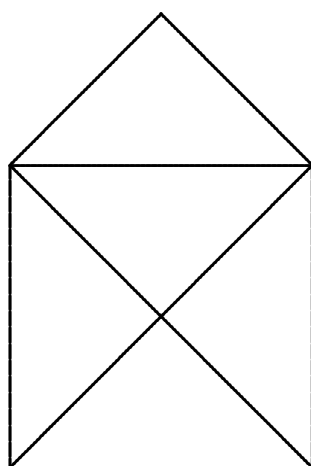


Abbildung 17: Dies ist das Haus vom Nikolaus.

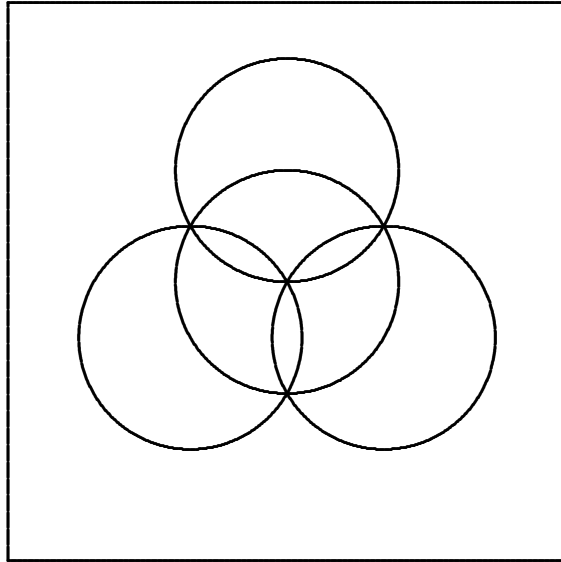


Abbildung 18: O'Beirnes Problem mit vier Kreisen

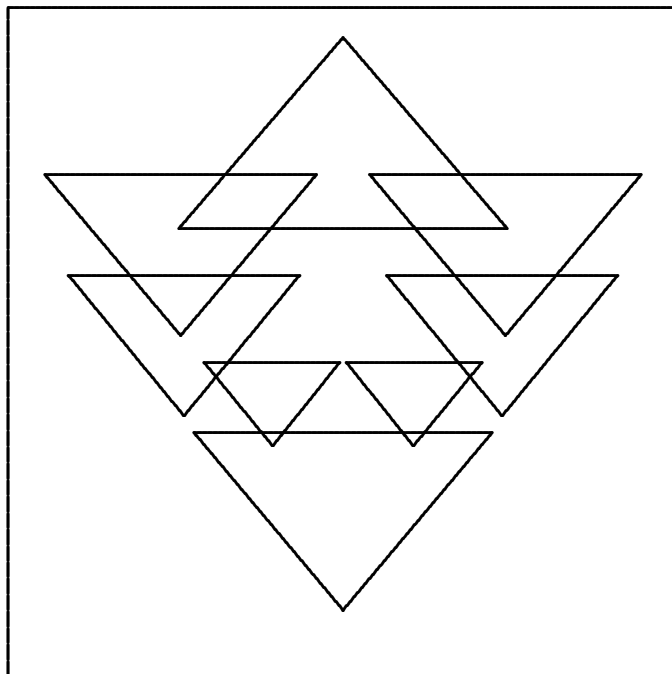


Abbildung 19: Auch diese Figur läßt sich überkreuzungsfrei in einem Zuge zeichnen.

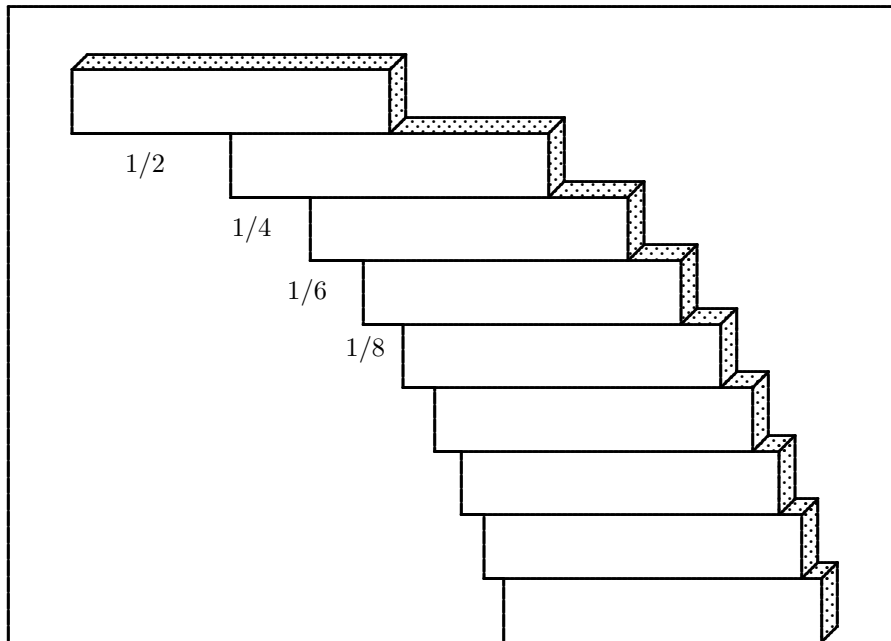


Abbildung 20: Stapel von Blöcken.

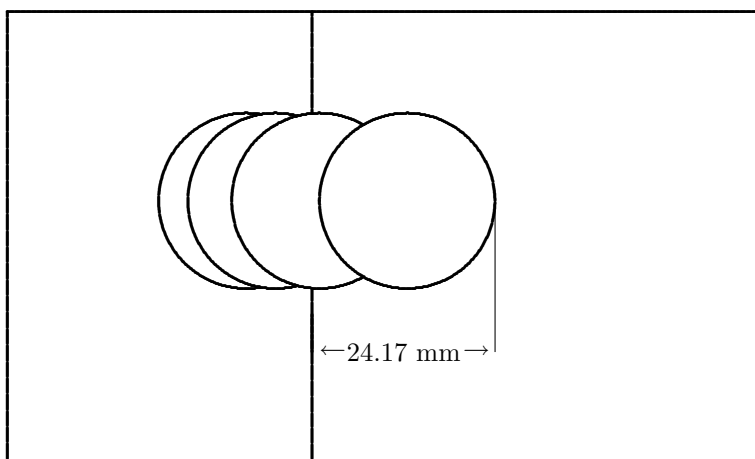


Abbildung 21: Stapelung von vier Münzen über eine Tischkante.

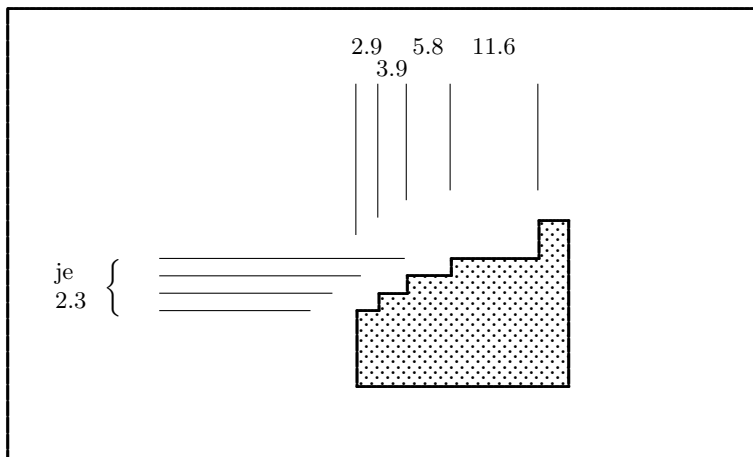


Abbildung 22: Schablone für den Münzentrück (Maßangaben in mm).

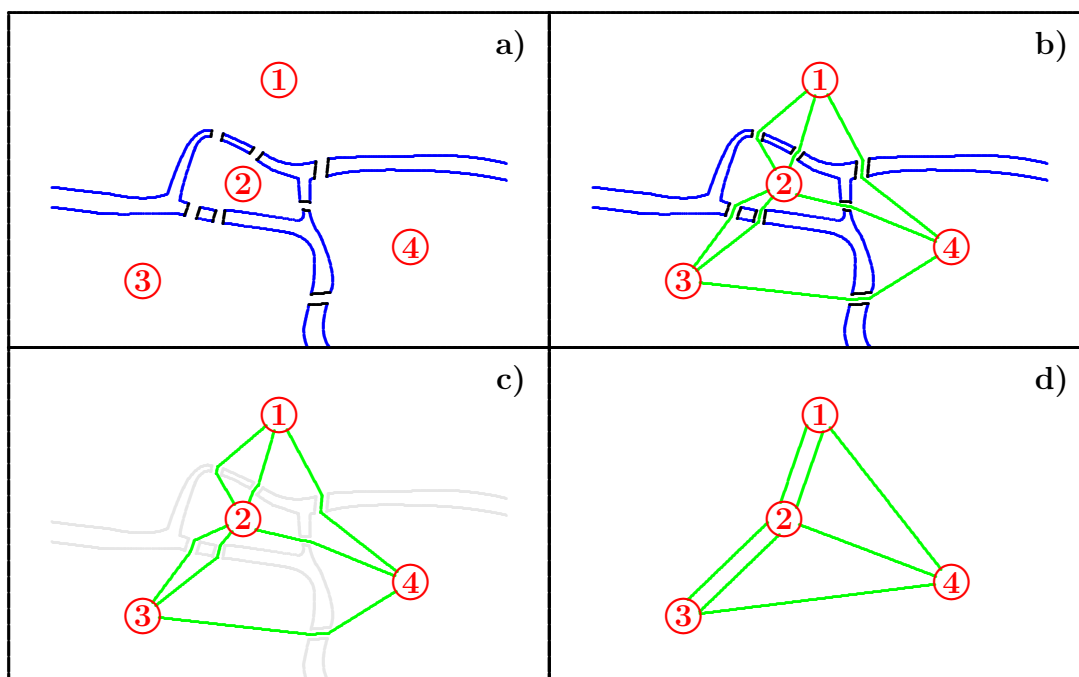


Abbildung 23: Das Königsberger Brückenproblem.

- a) Der Fluß Pregel teilt die Stadt Königsberg in vier Stadtteile, die mit den Ziffern 1 bis 4 bezeichnet sind. Zwischen den Stadtteilen gibt es insgesamt sieben Brücken.
- b) Die Wege zwischen den Stadtteilen über die sieben Brücken.
- c) Schema der Wege, Fluß und Brücken ausgeblendet.
- d) Gleiches Schema mit begradigten Wegen.